2 Drehen und Wenden

Strukturen geometrischer Symmetrien

Was zeigt ein Spiegel, der sich in einem Spiegel spiegelt?
Weißt du das, Goldäugige Gebieterin der Wünsche?
Michael Ende, „Die unendliche Geschichte“ (1979)

Im Einführungskapitel haben Sie erlebt, dass Phänomene und Prinzipien, die in einem Bereich (z.B. der Arithmetik) auftreten, auch an ganz anderer Stelle wieder auftauchen können (z.B. in der Geometrie). Gemeinsam war allen Fällen ein abstraktes mathematisches Konzept, die „binäre Operation“, also die Verknüpfung zweier Objekte zu einem neuen Objekt desselben Typs.

In diesem Kapitel geht es nun nicht mehr um Verknüpfungsstrukturen in der Arithmetik, mit der Sie wohl schon am längsten vertraut sind, sondern um Verknüpfungen von (geometrischen) Abbildungen. In der Welt der Zahlen finden Sie Abbildungen und Verknüpfungen auf folgende Weisen wieder:

Zahlen (z.B. die natürlichen Zahlen)
- **Abbildungen** von Zahlen auf Zahlen (z.B. $f: n \to n^2$)
- **Verknüpfungen** von jeweils zwei Zahlen auf eine Zahl (z.B. $a, b \to a \cdot b$)

Sie kennen bei Zahlenmengen Abbildungen als *Funktionen*, bei denen jeweils eine *einzelne* Zahl auf eine andere Zahl abgebildet wird. Bei Verknüpfungen (binären Operationen) hingegen werden *zwei Zahlen* auf eine andere Zahl, die Ergebniszahl, abgebildet. Wie sieht es aber nun in der Geometrie aus, bei der die Objekte nicht Zahlen, sondern Punkte oder ganze Mengen von Punkten (also geometrische Figuren) sind?

Punkte/Figuren (z.B. in der Ebene)
- **Abbildungen** von Punkten auf Punkte (z.B. $f: A \to A'$)
  - **Verknüpfungen** von Abbildungen (z.B. $f, g \to f \circ g$)

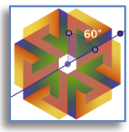
Geometrische Figuren kann man zeichnen, man kann sie systematisch konstruieren, indem man Geraden und Kreise durch Punkte konstruiert und wieder neue Schnittpunkte ermittelt. Im Folgenden geht es aber nicht darum, solche geometrischen Objekte miteinander zu verknüpfen (auch wenn so etwas prinzipiell möglich ist, z.B. indem man Repräsentanten von Größen miteinander verbindet). Es wird eine Stufe abstrakter, denn zunächst einmal werden die Objekte mithilfe von Abbildungen „bewegt“, also beispielsweise verschoben, gespiegelt oder gedreht. Erst im zweiten Schritt werden diese Abbildungen

T. Leuders, *Erlebnis Algebra*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II,
DOI 10.1007/978-3-662-46297-3_2

dann miteinander verknüpft, indem zwei Abbildungen hintereinandergeschaltet werden. Damit werden die Bewegungen gewissermaßen wieder zu neuen Objekten. Zunächst müssen daher die zu verknüpfenden Objekte, also die geometrischen Abbildungen, präzise beschrieben sein. Es muss klar sein, was man unter einer „Bewegung" versteht und wie man sie mathematisch beschreibt.

2.1 Verändern und gleich lassen

Wie also sehen „Bewegungen" aus, die man miteinander verknüpfen kann? Die folgende Erkundung kann Ihnen helfen, Ihr geometrisches Wissen aufzufrischen und möglicherweise noch etwas Neues dabei zu entdecken.

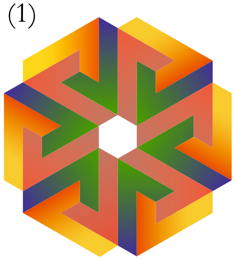


→*Programm* Drehen_und_Spiegeln

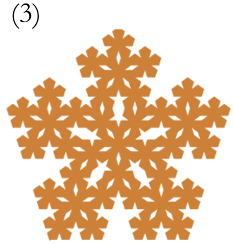
Erkundung 2.1: Viele Kunstwerke und Gegenstände des Alltags enthalten gleiche Teile, die auf bestimmte Weise angeordnet sind. Das bezeichnet man üblicherweise als „Symmetrie". Eine Symmetrie führt dazu, dass man die Figur bewegen kann, ohne dass sich ihr Bild verändert. Untersuchen Sie, welche solcher „unerkannten Bewegungen" bei diesen Bildern und Gegenständen möglich sind. Versuchen Sie möglichst *alle* zu finden und sie nach Typen zu ordnen.

a) Hier sind einige Bilder und Symbole aus vielen Jahrhunderten versammelt. (Zusatzherausforderung: Woher könnten diese Bilder stammen?)

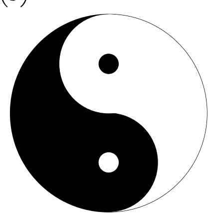
(1)



(3)

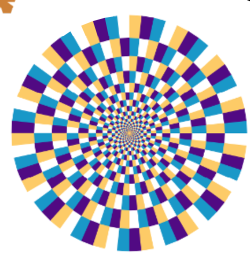


(5)



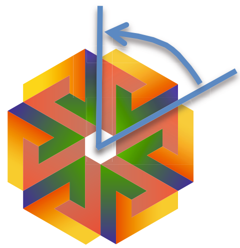
(2)

(4)



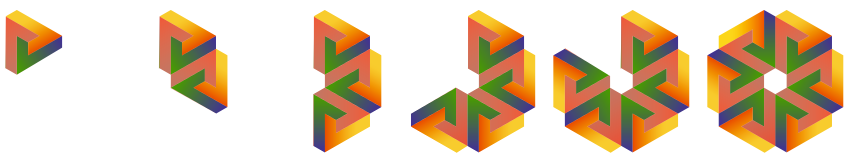
b) Bandornamente wie das nachfolgende gibt es in vielen Kulturen. Man muss sie sich unendlich fortgesetzt vorstellen. Welche Bewegungen sind möglich?

Das „Sechseckbild“ (1) kann man um ein Sechstel, also um 360° : 6 = 60° drehen und erhält wieder dieselbe Figur. Die Figur bleibt dann unveränderlich (*invariant*), sie kommt mit ihrem ursprünglichen Bild zur *Deckung*.



Dies ist eine mathematisch präzisierte Aussage über die Symmetrie der Figur, ausgedrückt durch die Invarianz der Figur bei bestimmten Bewegungen. Solche „unerkennbaren Bewegungen“ kann man also als *Invarianzabbildungen* oder *Deckabbildungen* der Figur bezeichnen.

Man kann die Symmetrie der Figur aber auch anders ausdrücken, nämlich über die Zusammensetzung der Figur aus gleichen Teilen bzw. über die Erzeugung der Figur aus einem Urelement: Die Figur entsteht, indem ein bestimmter Teil der Figur mit seinen kongruenten, durch Drehung um 60° entstehenden Abbildern zu einem Ganzen zusammengesetzt wird.

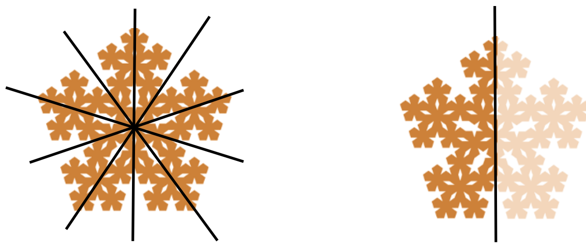


Beide Sichtweisen, Invarianz und Erzeugung, laufen auf dasselbe hinaus: Die Figur besitzt eine Symmetrie, die am besten durch die Abbildung der Sechsteldrehung beschrieben wird. Man nennt diese Abbildung daher auch eine „Symmetrieabbildung“ oder einfach „eine Symmetrie“ der Figur. Wenn man in der Mathematik sagt, das Sechseckbild besitze eine „sechszählige Symmetrie“, so bezieht man sich auf ebendiese Abbildung. Ob die Abbildung als Invarianz oder als Erzeugende aufgefasst wird, ist dabei unerheblich.

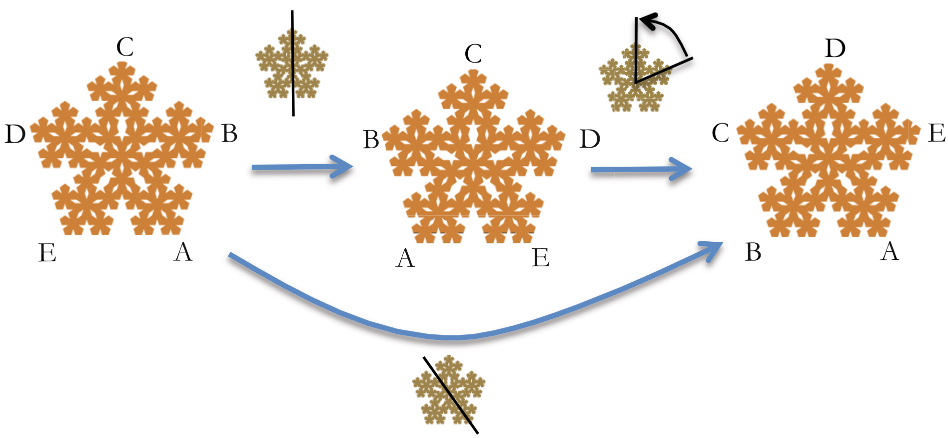
Beim arabischen Ornament (2) spricht man daher auch von „zweizähliger Symmetrie“, die Symmetrieabbildung ist eine Drehung mit dem Drehwinkel 360° : 2 = 180°. Aber auch das Sechseckbild hat eine zweizählige Symmetrie, was natürlich daran liegt, dass ein dreimaliges Drehen um ein Sechstel einem Drehen um die Hälfte gleichkommt. Und wenn die Sechseckfigur bei jeder einzelnen Sechstelbewegung invariant bleibt, tut sie dies auch beim Hintereinanderschalten von drei Sechstelbewegungen. Das Hintereinanderschalten von Drehungen hat anscheinend in etwa dieselbe Struktur wie das Addieren von

Vielfachen eines Stammbruches, in diesem konkreten Fall von Brüchen der Menge $\{\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\frac{6}{6}\}=\{\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\}$.

Die „fünfeckige Schneeflocke" (3) hat eine fünfzählige Symmetrie mit einem Drehwinkel von 360° : 5 = 72°. Aber sie hat noch mehr Symmetrien, denn sie besitzt auch noch Spiegelachsen. Auch die Spiegelsymmetrie lässt sich wieder aus zwei Perspektiven beschreiben: als Invarianz einer Figur beim Spiegeln (links) oder als Erzeugung einer Figur durch Spiegeln eines Teils (rechts).



Es ist kein Zufall, dass diese Figur *fünf*zählige Drehsymmetrie und zugleich *fünf* Spiegelachsen besitzt. Um das zu verstehen, versuchen Sie beispielsweise einmal eine Figur zu zeichnen, die vierzählige Drehsymmetrie besitzt aber nur eine oder zwei Spiegelachsen. Warum gelingt es Ihnen nicht? Spiegel und Drehsymmetrie scheinen miteinander verbunden zu sein, die Drehung nimmt die Spiegelachsen gewissermaßen mit. Das wiederum liegt daran, dass die Verknüpfung von zwei Invarianzabbildungen wiederum eine Invarianzabbildung ist.

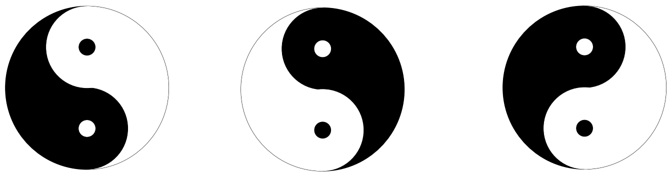


Anstelle der Spiegelung und darauffolgenden Drehung hätte man – das erkennt man am Bild – gleich an einer anderen Achse spiegeln können. Sie sehen allerdings, dass die Spiegelachse nicht um 72°, sondern nur um den halben Drehwinkel 36° „mitgenommen" wird. Können Sie das erklären?

Es ist übrigens auch kein Zufall, dass der Drehpunkt der Drehsymmetrie genau der Schnittpunkt der Spiegelachsen ist. Ist das immer der Fall? Woran liegt es?

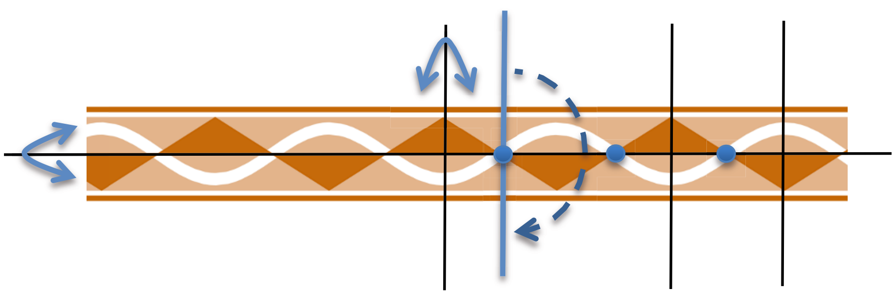
Was allerdings durchaus passieren kann, ist, dass trotz der Drehsymmetrie *keine* einzige Spiegelachse zu finden ist. Schauen Sie noch einmal nach, bei welchen Figuren (1)–(5) das der Fall ist und woran es jeweils liegt.

Eine Art „Spielverderber" ist das fernöstliche Symbol aus Beispiel (5).

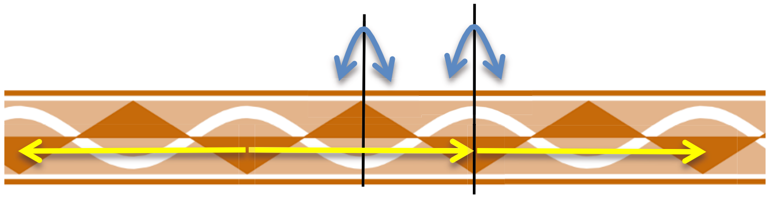


Es weist tatsächlich *keine* Spiegel- und *keine* Drehsymmetrie auf. Sie glauben es nicht? Dann drehen Sie es doch einmal um 180° oder spiegeln es und vergleichen dann das Ergebnis mit dem Ursprungsbild. Obwohl es keine Symmetrien im eben definierten mathematischen Sinn hat, erscheint es uns „irgendwie" symmetrisch. Es ist ja aus zwei identischen Teilen zusammengesetzt, die lediglich eine unterschiedliche Farbe besitzen. Wie kann man diese Symmetrie beschreiben? Man könnte als Abbildung die folgende Hintereinanderausführung von zwei Abbildungen definieren: erst eine *Drehung* um 180°, dann eine *Umfärbung*, d.h. ein Vertauschen von Schwarz und Weiß (den Rand des Kreises einmal außer Acht lassend). Drehen und Umfärben sind für sich genommen keine Symmetrie der Figur, beide hintereinander ausgeführt – in welcher Reihenfolge auch immer – aber sehr wohl. Die Figur ist also „drehumfärbsymmetrisch".

Auch beim Bandornament (6) findet man Spiegelungen und Drehungen als Symmetrien:



Hier sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Symmetrien aber noch etwas komplizierter: Eine Spiegelung an der horizontalen Achse ist bei diesem Beispiel keine Symmetrie, aber eine Spiegelung an bestimmten senkrechten Achsen sowie Drehungen um 180°. Allerdings liegt der Drehpunkt nun nicht mehr auf der Spiegelachse. Zudem gibt es nicht nur *einen* Drehpunkt und *eine* Achse, sondern eine ganze Reihe – wenn man sich das Bandornament unendlich fortgesetzt denkt. Wenn man in diesem Fall zwei Spiegelungen an verschiedenen Achsen kombiniert, so erhält man eine neue Art der Abbildung, die bei den obigen Bildern nicht auftrat: eine Verschiebung.



Und weil die Hintereinanderausführung von zwei Invarianzabbildungen wieder eine ist, ist natürlich auch das Verschieben um zwei, drei oder mehr Einheiten eine Symmetrie. Und auch die Verschiebung in die Gegenrichtung ist eine Symmetrie.

Man erkennt hier, dass das Hintereinanderausführen für alle Invarianzabbildungen eine Möglichkeit zu sein scheint, weitere Symmetrien zu erzeugen. Und was genau passiert, wenn man erst spiegelt und dann verschiebt? Oder erst dreht und dann verschiebt? Findet man dann vielleicht noch ganz andere Symmetrien? Nach welchem System hängen all diese Symmetrien zusammen? Und wie sieht das bei anderen Bandornamenten aus? Diese Überlegungen zum Wesen von Symmetrie sollen nun aber erst einmal unterbrochen werden zugunsten einer übergreifenden Betrachtung des Gefundenen.

Sie haben in dieser Erkundung (und im vorigen Kapitel) erleben können, dass die Phänomene „Bewegen“ und „Gleichbleiben“ immer wieder in enger Verbindung auftreten: Ein Spiegel bewegt eine Figur auf die andere Seite der Achse, ohne ihre Form zu zerstören. Aber durch Spiegeln kann man auch zeigen, dass eine Figur auf bestimmte Weise aus gleichen Teilen besteht und sich trotz Bewegung nicht verändert. Dieser Zusammenhang von Bewegung und Gleichheit ist der Kern dessen, was man als *Symmetrie* bezeichnet. Im Alltag bezeichnen wir Situationen als symmetrisch, denen eine gewisse Regelmäßigkeit und damit verbundene Schönheit zu eigen ist. Bei genauer Betrachtung erleben wir dabei immer wieder Phänomene, die alle zum Symmetriekonzept dazugehören:

- In einer Situation taucht auf bestimmte Weise das *Gleiche* wieder woanders auf (Wiederholung).
- Man kann das *Ganze* erzeugen, indem man nur einen *Teil* immer wieder auf eine bestimmte Weise bewegt (Erzeugung).
- Das Ergebnis ist dabei eine Figur, die aus bestimmten Bewegungen *unverändert* hervorgeht (Invarianz).

Die sich hier entfaltende Sicht auf all diese Objekte durch die dynamische Brille von Bewegung und Invarianz bietet eine Möglichkeit, das Konzept „Symmetrie“ auf eine sehr universelle und systematische Weise zu präzisieren. Man spricht dann nicht mehr von einem „irgendwie symmetrisch aussehenden Objekt“, sondern kann ganz exakt sagen, *was* genau an dem Objekt symmetrisch ist:

Eine Objekt M (also z.B. eine geometrische Figur) wird aufgefasst als eine Menge von Punkten – hier erst einmal in der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$:

$$M \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Nun betrachtet man alle *Kongruenzabbildungen* (*Isometrien*) der Ebene, also alle Abbildungen, die die Abstände zwischen Punkten gleich lassen und damit die Form aller Figuren nicht verändern:

$$Isom(\mathbb{R}^2) = \{ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \forall A,B \in \mathbb{R}^2 : |g(A) - g(B)| = |A - B| \}$$ [1]

Als *eine Symmetrie* g *der Figur* M wird dann eine solche Kongruenzabbildung bezeichnet, die die Figur M (also deren Punktmenge) invariant lässt:

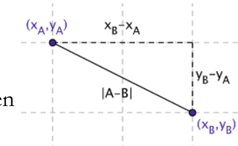
$$g(M) = M$$

Man nennt diese dann auch eine *Symmetrieabbildung* oder *Deckabbildung von* M. Die Gesamtheit aller Symmetrieabbildungen einer Figur

$$G_M = \{ g \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid g(M) = M \}$$

wird dann als *die Symmetrie* der Figur M bezeichnet.

Diese Definition von Symmetrie ist eine besondere Errungenschaft der Mathematik, die in ihrer vollen Klarheit noch nicht viel älter als 100 Jahre ist. Erstens liegt damit eine *mathematisch präzise* Definition von Symmetrie vor, mit der man in Theorie und Anwendung nun viele weitere Analysen vornehmen kann. Zweitens ist die Definition ausgesprochen *flexibel*: Man kann statt der Ebene beispielsweise den dreidimensionalen Raum betrachten oder ganz andere, abstrakte Räume. Man kann sich fragen, wie man auch Punkte unterschiedlicher Farbe berücksichtigt. Auch kann man noch ganz andere Typen von Abbildungen jenseits der Kongruenzabbildungen zulassen, z.B. zentrische Streckungen, die dann nicht die Abstände, aber die Abstandsverhältnisse invariant lassen. Die Auffassung von Symmetrie als einer Menge G_M von Invarianzabbildungen ist außerdem ein *fundamentales Prinzip* in der modernen Physik und grundlegendes Prinzip auf allen mathematischen Gebieten. Mit diesem Symmetriekonzept lassen sich in allen Wissenschaften universelle Muster und Strukturen unserer Welt erfassen und beschreiben. Ob der Gegenstand Moleküle, Kristalle, Elementarteilchen oder unsere Raumzeit selbst ist, seine mathematische Behandlung umfasst eigentlich immer die Untersuchung seiner Symmetrien[2].

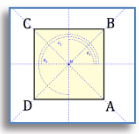


[1] Die Betragsstriche stehen für den Abstand zwischen zwei Punkten, den man in der Ebene so berechnen kann: $|A - B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

[2] Wenn Sie mehr über die Bedeutung des Symmetriekonzepts in der Mathematik und den Naturwissenschaften und über die historischen, biografischen und philosophischen Hintergründe seiner Entwicklung erfahren wollen, so sei Ihnen das ausgesprochen anregend und verständlich geschriebene Buch „Die Macht der Symmetrie: Warum Schönheit Wahrheit ist“ von Ian Stewart (2008) empfohlen.

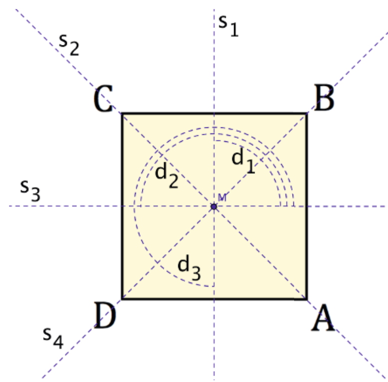
Nun sind Sie gewappnet für das eigentliche Abenteuer, von dem Sie eben noch kurzzeitig für die präzise Definition von Symmetrie abgehalten wurden: die Untersuchung der Symmetriestruktur von Figuren. Während Sie in der Schule die Symmetrien von Objekten aufgezählt und nach Spiegelungen und Drehungen sortiert haben, können Sie nun eintauchen in die Welt der Beziehungen *zwischen* den Symmetrien, sprich: in die Strukturen, die sich eröffnen, wenn man Symmetrien miteinander *verknüpft*.

Die systematische Untersuchung der Verknüpfungen all dieser Abbildungen wird einfacher, wenn Sie sich zunächst einmal auf eine hinreichend komplexe, aber immer noch übersichtliche Figur konzentrieren, auf das Quadrat.



→Programm Symmetrien_des _Quadrates

Erkundung 2.2: Als Symmetrien des Quadrates kennen Sie bereits vier Achsenspiegelungen und drei Drehungen. Finden Sie *alle* Symmetrien des Quadrates, indem sie bestehende Symmetrien auf jede mögliche Weise miteinander kombinieren. Notieren Sie die Ergebnisse für alle Verknüpfungen in Form einer Verknüpfungstabelle. Welche Strukturen erkennen Sie?



Nutzen Sie vereinfachende Schreibweisen wie z.B. $G_M=\{ d_0, d_{90}, d_{180}, d_{270}, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ oder, wenn Sie mögen, die noch einfacheren $G_M=\{1, r, r^2, r^3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Dabei steht r für $r = d_1 = d_{90}$ und folglich ist $r^2 = r \circ r = d_{90} \circ d_{90} = d_{180}$ usw.

Natürlich gelten für diese Symbole *nicht* automatisch die vertrauten Rechenregeln wie für Zahlen und Variablen, daher wählt man auch bewusst das Verknüpfungszeichen „ $\circ$ “ und nicht das vertraute „ $\cdot$ “. Sie sollten also vorsichtig zu Werke gehen und untersuchen, *welche* Regeln ähnlich wie bisher und welche ganz anders funktionieren.

Wenn Sie nicht immer wieder Quadrate zeichnen wollen, können Sie eine Schreibweise erfinden, mit der Sie die Position der Ecken nach einer oder mehreren Symmetriebewegungen notieren können.

Die Drehungen allein sind recht übersichtlich: Eine Drehung um α, verknüpft mit einer Drehung um β, ergibt eine Drehung um $\alpha + \beta$. Das kann man so schreiben: $d_\beta \circ d_\alpha = d_{\alpha+\beta}$. Wenn Sie sich über die Reihenfolge der Abbildungen wundern, so schauen Sie noch einmal in Kapitel 1 (S. 11), wo erläutert wurde, warum man die Verknüpfung von Abbildungen in der Symbolsprache von rechts nach links denkt und schreibt,

$$A'' = d_\beta(d_\alpha(A)) = d_\beta \circ d_\alpha(A) \;,$$

obwohl man die Hintereinanderausführung chronologisch intuitiv wohl lieber wie die herkömmliche Leserichtung von links nach rechts denkt:

$$A \xrightarrow{d_\alpha} A' \xrightarrow{d_\beta} A''$$

Eine Drehung von 360° führt zu der Ursprungssituation und wird daher meist mit der „Nicht-Drehung“ gleichgesetzt. Ebenso wird eine Drehung um mehr als 360° auf einen Winkel unter 360° reduziert. Statt 540° dreht man beispielsweise nur um 180°. Auch die Drehungen in die Gegenrichtung braucht man nicht, wenn man sie durch passende komplementäre Drehungen ersetzt: Man kann folglich statt –90° (also im Uhrzeigersinn) auch +270° (also gegen Uhrzeiger Sinn) drehen.

Diese Festlegung ist durchaus nicht die einzig denkbare. Man könnte etwa auch mit Winkeln außerhalb des Intervalls von 0° bis 360° rechnen. Dann wäre die Struktur, die sich ergibt, völlig analog zum Addieren und Subtrahieren in den ganzen Zahlen, nur dass die Einheit dann nicht 1, sondern 90° beträgt. In Kombination mit anderen Abbildungen wird es aber wichtig, dass man eine Drehung eindeutig aus ihrer Endlage identifiziert. Wenn nämlich zwei Spiegelungen zu einer Drehung führen, muss man festlegen, zu *welcher* Drehung, sonst hat man keine eindeutige Verknüpfung.

Will man die Verknüpfung von Drehungen in einer Verknüpfungstabelle übersichtlich darstellen, so sähe diese etwa so wie eine der folgenden Tabellen aus:

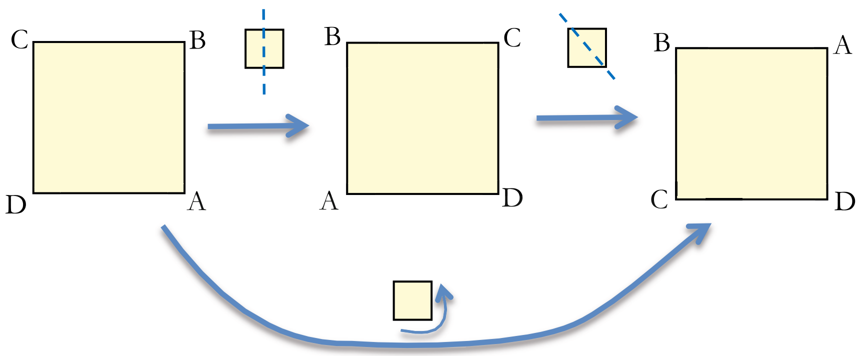
$\circ$	d_0	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_0	d_0	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_{90}	d_{90}	d_{180}	d_{270}	d_0
d_{180}	d_{180}	d_{270}	d_0	d_{90}
d_{270}	d_{270}	d_0	d_{90}	d_{180}

+	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

$\circ$	1	r	r^2	r^3
1	1	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	1
r^2	r^2	r^3	1	r
r^3	r^3	1	r	r^2

Bei der ersten Tabelle können Sie sich leicht vorstellen, wie Drehungen auch um andere Werte als die Winkel 0°, 90°, 180° und 270° Grad verknüpft werden. Die Tabelle erinnert auch sehr an die Verknüpfung der Endziffern bei der Addition von natürlichen Zahlen (mittlere Tabelle), nur dass statt der Zehnergrenze hier die 360-er Grenze auftritt. Die Verknüpfung von Drehungen „entspricht“ also letztlich der Addition der Winkel mit Bilden des Restes bei Teilen durch 360. Diese Form des „Entsprechens“ wird immer wieder eine große Rolle spielen, weil Sie immer mehr erkennen werden, wie Strukturen in einem Bereich denen in einem anderen Bereich völlig analog sind. Dies ist Ausdruck der Universalität des Symmetriekonzepts. Schreibt man schließlich für die Drehung um 0° die sogenannte „identische Abbildung“ $d_0 = 1$ und für die „Grunddrehung“ $r = d_{90}$, so kann man die weiteren Drehungen als zweifache Drehung $r \circ r = r^2 = d_{180}$ und dreifache Drehung als $r \circ r \circ r = r^3 = d_{270}$ notieren. Die vierfache Drehung ist dann wieder $r^4 = d_{360} = d_0 = 1$.

Was passiert aber nun, wenn man nicht zwei Drehungen, sondern zwei verschiedene Spiegelungen verknüpft? Sie haben in Kapitel 1 herausgefunden, dass zwei Spiegelungen insgesamt wieder eine Drehung ergeben. Da dies eine Aussage über Kongruenzabbildungen der ganzen Ebene ist, gilt sie natürlich ebenso für ebene Figuren wie den Kreis oder das Quadrat. Um eine systematischere Übersicht darüber zu bekommen, *welche* Verknüpfungen von Spiegelungen zu *welchen* Drehungen führen, reicht es, wenn man sich anschaut, auf welche Weise die Buchstaben an den Ecken ihre Plätze tauschen.



Hier ist zu erkennen, dass die Hintereinanderausführung erst von s_1 und dann von s_4 dieselbe Wirkung hat wie die Drehung r, symbolischer notiert: $s_2 \circ s_1 = r$. Wem das noch zu viel Zeichnen ist, der kann die Bewegungen des Quadrates auch ohne das Bild folgendermaßen aufschreiben:

$$\boxed{\begin{matrix} C & B \\ D & A \end{matrix}} \xrightarrow{s_1} \boxed{\begin{matrix} B & C \\ A & D \end{matrix}} \xrightarrow{s_2} \boxed{\begin{matrix} B & A \\ C & D \end{matrix}}$$

Solchermaßen gerüstet lassen sich die verschiedenen Ergebnisse der Verknüpfung zweier Spiegelungen in einer *Verknüpfungstabelle* (ähnliche der Multiplikationstabelle) zusammenfassen (linke Abbildung):

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	r	r^2	r^3
s_2	r^3	1	r	r^2
s_3	r^2	r^3	1	r
s_4	r	r^2	r^3	1

$\circ$	s_1	s_3	s_2	s_4
s_1	1	r^2	r	r^3
s_3	r^2	1	r^3	r
s_2	r^3	r	1	r^2
s_4	r	r^3	r^2	1

Zu erkennen ist hier gut, dass jede Spiegelung sich selbst aufhebt, also: $s_1 \circ s_1 = s_2 \circ s_2 = s_3 \circ s_3 = s_4 \circ s_4 = 1$. Man sieht auch, dass zwei Spiegelungen, die senkrecht aufeinanderstehen, in ihrer Reihenfolge vertauschbar sind und immer zu einer Drehung um 180°, also einer Punktspiegelung führen: $s_1 \circ s_3 = s_3 \circ s_1 = r^2$ und $s_2 \circ s_4 = s_4 \circ s_2 = r^2$. Am rechten Bild, bei dem die Reihenfolge der Elemente in den Zeilen und Spalten geändert wurde, wird dies besonders deutlich.

http://www.springer.com/978-3-662-46296-6

Erlebnis Algebra
zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten
Leuders, T.
2016, IX, 264 S. 288 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-46296-6